

Vejledende opgavebesvarelse i demografi Efteråret 2005

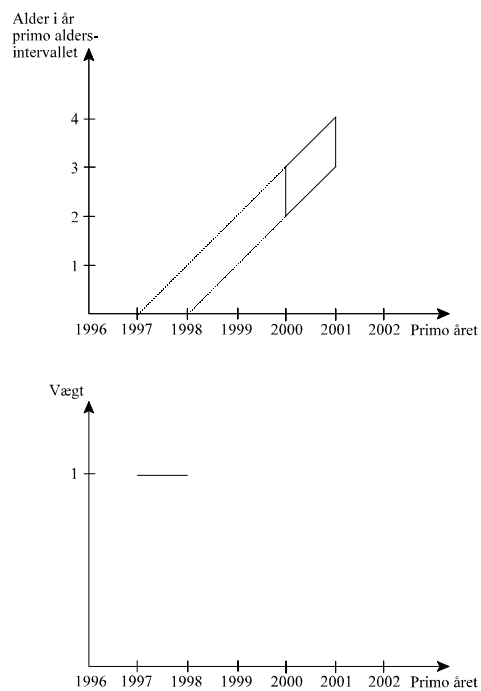
© Christen Sørensen

Opgave 2.1

Opgavens formål er at give den studerende lejlighed til at afprøve, om et af bogens redskaber, figur 2.2.3, kan anvendes i en anden sammenhæng.

Da der er korrespondance mellem tæller og nævner, når der anvendes B-hyppigheder, bliver den til figur 2.2.3 svarende figur simple, når det drejer sig om B-grupper, jf. nedenstående figur:

Figur 1. Beregning af dødshyppigheder ud fra B-grupper



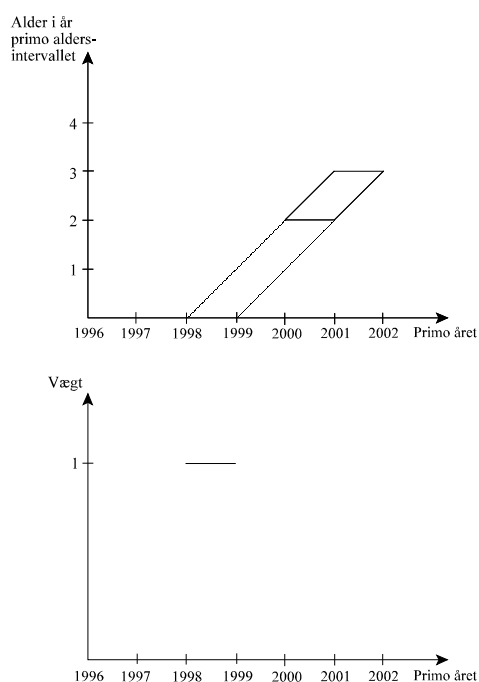
Anm.: Vægten er defineret som forholdet mellem indgået tid opgjort i antal dage og antallet af dage i 2000 (366). Vægten 1 opnås af alle i 1997-generationen.

Opgave 2.2

Opgavens formål er at give den studerende lejlighed til at afprøve, om et af bogens redskaber, figur 2.2.4, kan anvendes i en anden sammenhæng.

Da der er korrespondance mellem tæller og nævner, når der anvendes C-hyppigheder, bliver den til figur 2.2.4 svarende figur simple, når det drejer sig om C-grupper, jf. nedenstående figur:

Figur 1. Beregning af dødshyppigheder ud fra C-grupper



Anm.: Vægten er defineret som forholdet mellem indgået tid opgjort i antal dage og antallet af dage i 2000 (366). Vægten 1 opnås af alle i 1998-generationen.

Opgave 2.3

Opgavens formål

Opgavens formål er at give den studerende lejlighed til at afprøve, om den udviklede notation for hyppigheder kan anvendes.

$$hd_{1997-98/1997,2,2000/2000}^A = \frac{D_{1997-98,2,2000}}{B_{1997,2,2000} + \frac{1}{2}I_{1997-98,2,2000} - \frac{1}{2}U_{1997-98,2,2000}}$$

$$hd_{1997-98/1998,2/2,2000}^A = \frac{D_{1997-98,2,2000}}{B_{1998,2,2000} + \frac{1}{2}I_{1997-98,2,2000} - \frac{1}{2}U_{1997-98,2,2000}}$$

Opgave 2.4

Det primære mål med opgaven er at opøve evnen til at frigøre sig fra den begrænsning, der altid ligger i en pensumbog. M.a.o. at opøve evnen til selv at kunne gennemføre en kritisk analyse og udarbejde konstruktive forslag.

En nærliggende mulighed er at opgøre en befolknings hyppigheder for dødsfald inden for en 1-årig periode/et 1-årigt aldersforløb alene ud fra den befolkning, der *ikke* har haft bopæl i udlandet i den betragtede periode.

Anvendes igen eksemplet med den 1-årige døds hyppighed for 2-årige drenge i 2000, fås følgende resultater, når det nu gældende hyppighedsmål sammenlignes med hyppighedsmål, hvor der er set bort fra personer, der har haft bopæl i udlandet i den betragtede periode.

A-hyppighedsmålet, tidspunktfikseret

Nuværende hyppighedsmål:

$$hd_{1997-98/1997,2,2000/2000}^A = \frac{D_{1997-98,2,2000}}{B_{1997,2,2000} - \frac{1}{2}U_{1997-98,2,2000} + \frac{1}{2}I_{1997-98,2,2000}} \quad (1)$$

Alternativt hyppighedsmål:

$$hd_{1997-98/1997,2,2000/2000}^{A*} = \frac{D_{1997-98,2,2000} - DI_{1997-98,2,2000}}{B_{1997,2,2000} - U_{1997,2-3,2000}} \quad (2)$$

I det alternative mål indgår kun de dødsfald, der hidrører fra de 2-årige drenge i 2000, der ikke har haft bopæl i udlandet i 2000. Derfor fratrækkes dødsfaldene blandt indvandrede 2-årige drenge i 2000 i tællerudtrykket. Dette antal er her betegnet $DI_{1997-98,2,2000}$. Betegner $D_{1997-98,2,2000}^*$ antal dødsfald blandt 2-årige drenge i 2000, der ikke har haft bopæl i udlandet i 2000, er:

$$D_{1997-98,2,2000}^* = D_{1997-98,2,2000} - DI_{1997-98,2,2000} \quad (3)$$

På tilsvarende måde indgår i nævnerudtrykket kun den del af populationen af 2-årige drenge primo 2000, der ikke har haft bopæl i udlandet i 2000. Derfor fratrækkes den del af primopopulationen, der udvandrer i løbet af 2000. Dette antal er $U_{1997,2-3,2000}$ og er altså antallet af udvandrere efter en B-gruppebetragtning.

Betegner $B_{1997,2,2000}^*$ antal 2-årige drenge primo 2000, der ikke vil få bopæl i udlandet i 2000, er:

$$B_{1997,2,2000}^* = B_{1997,2,2000} - U_{1997,2-3,2000} \quad (4)$$

Det alternative tidspunktfikserede A-hyppighedsmål kan følgelig formuleres som:

$$hd_{1997-98/1997,2,2000/2000}^{A*} = \frac{D_{1997-98,2,2000}^*}{B_{1997,2,2000}^*} \quad (5)$$

Denne formulering forklarer også specifikationen af fodtegnene til hd^{A*} i (2).

A-hyppighedsmålet, aldersfikseret

Nuværende hyppighedsmål:

$$hd_{1997-98/1998,2/2^*,2000}^A = \frac{D_{1997-98,2,2000}}{B_{1998,2^*,2000} - \frac{1}{2}U_{1997-98,2,2000} + \frac{1}{2}I_{1997-98,2,2000}} \quad (6)$$

Alternativt hyppighedsmål:

$$hd_{1997-98/1998,2/2^*,2000}^{A*} = \frac{D_{1997-98,2,2000} - DI_{1997-98,2,2000}}{B_{1998,2^*,2000} - U_{1998,2,2000-01}} \quad (7)$$

Det er kun nævnerudtrykket, der her skal kommenteres, idet tællerudtrykket er det samme som i den tidspunktfikserede A-hyppighed. I den aldersfikserede A-hyppighed indgår de drenge, der netop fylder 2 år i løbet af 2000. Den del af disse drenge, der vil få bopæl i udlandet inden for et år efter indtræden ved eksakt 2-årsalderen i 2000, opgøres som antallet af udvandrere fra 1998-generationen af drenge efter en C-gruppebetragtning, jf. udtrykket $U_{1998,2,2000-01}$. Betegner $B_{1998,2^*,2000}^*$ antallet af drenge fra 1998-generationen, der ikke vil få bopæl i udlandet som 2-årige, er:

$$B_{1998,2^*,2000}^* = B_{1998,2^*,2000} - U_{1998,2,2000-01} \quad (8)$$

Det alternative aldersfikserede A-hyppighedsmål kan følgelig formuleres som:

$$hd_{1997-98/1998,2/2^*,2000}^{A^*} = \frac{D_{1997-98,2,2000}^*}{B_{1998,2^*,2000}^*} \quad (9)$$

Denne formulering forklarer også specifikationen af fodtegnene til hd^{A^*} i (7).

B-hyppighedsmålet

Nuværende hyppighedsmål:

$$hd_{1997,2-3/2,2000/2000}^B = \frac{D_{1997,2-3,2000}}{B_{1997,2,2000} - \frac{1}{2}U_{1997,2-3,2000} + \frac{1}{2}I_{1997,2-3,2000}} \quad (10)$$

Alternativt hyppighedsmål:

$$hd_{1997,2-3/2,2000/2000}^{B^*} = \frac{D_{1997,2-3,2000} - DI_{1997,2-3,2000}}{B_{1997,2,2000} - U_{1997,2-3,2000}} \quad (11)$$

I det alternative mål indgår kun de i 2000 indtrådte dødsfald fra de drenge, der primo 1995 var 2-årige, og som ikke har haft bopæl i udlandet i 2000. Derfor fratrækkes i tælleren dødsfaldene blandt de i 2000 indvandrede, der var 2-årige primo 2000. Dette antal er her betegnet $DI_{1997,2-3,2000}$. Betegner $D^*_{1997,2-3,2000}$ antal dødsfald i 2000 blandt de drenge, der var 2-årige primo 2000, og som ikke har haft bopæl i udlandet i 2000, er:

$$D^*_{1997,2-3,2000} = D_{1997,2-3,2000} - DI_{1997,2-3,2000} \quad (12)$$

Det ses, at nævneren i (11) er lig nævneren i (2) og dermed også lig nævneren i (5).

Det alternative B-hyppighedsmål kan følgelig formuleres som:

$$hd^{B^*}_{1997,2-3/2,2000/2000^*} = \frac{D^*_{1997,2-3,2000}}{B^*_{1997,2,2000^*}} \quad (13)$$

Denne formulering forklarer specifikationen af fodtegnene til hd^{B^*} i (11).

C-hyppighedsmålet

Nuværende hyppighedsmål:

$$hd^C_{1998,2/2^*,2000-01/2000} = \frac{D_{1998,2,2000-01}}{B_{1998,2^*,2000} - \frac{1}{2}U_{1998,2,2000-01} + \frac{1}{2}I_{1998,2,2000-01}} \quad (14)$$

Alternativt hyppighedsmål:

$$hd^{C^*}_{1998,2/2^*,2000-01/2000} = \frac{D_{1998,2,2000-01} - DI_{1998,2,2000-01}}{B_{1998,2^*,2000} - U_{1998,2,2000-01}} \quad (15)$$

I det alternative mål indgår kun de dødsfald blandt 2-årige drenge fra 1998-generationen, der ikke har haft bopæl i udlandet som 2-årige. Derfor fratrækkes i tælleren dødsfaldene blandt de indvandrede fra 1998-generationen, der indtrådte, da de var 2-årige. Dette antal er her betegnet $DI_{1998,2,2000-01}$. Betegner $D^*_{1998,2,2000-01}$ antal dødsfald blandt 2-årige drenge fra 1998-generationen, der ikke har haft bopæl i udlandet som 2-årige, er:

$$D^*_{1998,2,2000-01} = D_{1998,2,2000-01} - DI_{1998,2,2000-01} \quad (16)$$

Det ses, at nævneren i (15) er lig nævneren i (7) og dermed også lig nævneren i (9).

Det alternative C-hyppighedsmål kan følgelig formuleres som:

$$hd_{1998,2/2^*,2000-01/2000}^{C^*} = \frac{D_{1998,2,2000-01}^*}{B_{1998,2^*,2000}^*} \quad (17)$$

Denne formulering forklarer specifikationen af fodtegnene til hd^{C^*} i (15).

Kritik

Det kan siges, at det alternative mål ser bort fra, at der sker dødsfald blandt indvandrede i begyndelsen af indvandringsperioden, ligesom der i målet ses bort fra, at de, der tager bopæl i udlandet, faktisk har levet i indlandet uden at blive ramt af dødsfald i perioden op til udvandringen.

Årsagen til, at de her præsenterede alternative hyppighedsmål ikke beregnes, er dog næppe, at denne kritik ikke kan imødegås af, at det er den nationale 1-årige dødshyppighed, der især er af interesse.

Årsagen er først og fremmest, at det uden elektroniske registre er forbundet med et uforholdsmæssigt stort arbejde at foretage ikke mindst de tællerkorrektioner, der er nødvendige, jf. (2), (7), (11) og (15).

Opgave 2.5

Opgavens formål er at give den studerende lejlighed til at vise, at han/hun kan udlede (2.4.4) og (2.4.3).

Undlades fodtegnene kan (2.4.3) omskrives til:

$$kd (1 - \frac{1}{2} hd) = hd$$

Heraf fås:

$$hd (1 + \frac{1}{2} kd) = kd$$

Hvorfor:

$$hd = \frac{kd}{1 + \frac{1}{2} kd}$$

Opgave 2.6

Opgavens formål er at give den studerende lejlighed til at afprøve, om den udviklede notation for kvotienter kan anvendes.

$$kd_{1997-98/1997,2,2000/2000}^A = \frac{D_{1997-98,2,2000}}{B_{1998,2,2000} - 1/2D_{1997-98,2,2000} + 1/2I_{1997-98,2,2000} - 1/2U_{1997-98,2,2000}}$$

$$kd_{1997-98/1998,2/2^*,2000}^A = \frac{D_{1997-98,2,2000}}{B_{1998,2^*2000} - 1/2D_{1997-98,2,2000} + 1/2I_{1997-98,2,2000} - 1/2U_{1997-98,2,2000}}$$

Der kan dog argumenteres for, at $D_{1997-98,2,2000}$ i nævneren i de to højresider erstattes af hhv. $D_{1997,2-3,2000}$ og $D_{1998,2,2001-01}$. Men i så fald indgår hhv. et B- og C-gruppebegreb for at komme fra indgangspopulation til gennemlevet tid.

Opgave 2.7

Opgavens formål er at give den studerende lejlighed til at vise, at han/hun kan gennemføre de anførte formelomskrivninger og tænke over betydningen heraf.

Undlades fodtegnene i omskrivningen fås af enten (2.3.6) eller (2.3.7) under anvendelse af (2.4.4):

$$\frac{kd}{1 + 1/2 kd} = \frac{D}{B + 1/2 I - 1/2 U}$$

$$kd \cdot (B + 1/2 I - 1/2 U) = (1 + 1/2 kd) \cdot D$$

$$kd \cdot (B - 1/2 D + 1/2 I - 1/2 U) = D$$

$$kd = \frac{D}{B - 1/2 D + 1/2 I - 1/2 U}$$

Heraf ses, at (2.3.6) og (2.3.7) ved hjælp af (2.4.4) kan omskrives til hhv. (2.4.6) og (2.4.7).

(2.4.6) og (2.4.7) kan omvendt også omskrives til hhv. (2.3.6) og (2.3.7) ved hjælp af

(2.4.3):

$$\frac{hd}{1 - 1/2hd} = \frac{D}{B - 1/2D + 1/2I - 1/2U}$$

$$hd \cdot (B - 1/2D + 1/2I - 1/2U) = (1 - 1/2hd) \cdot D$$

$$hd \cdot (B + 1/2I - 1/2U) = D$$

$$hd = \frac{D}{B + 1/2I - 1/2U}$$

Ovenstående implicerer, at overgangsformlerne mellem hyppigheder og kvotienter (2.4.3) og (2.4.4) gælder for både lukkede og åbne befolkninger.

Opgave 3.1

Opgavens formål er at teste, om vejede gennemsnit som generelle fertilitetskvoteinter kan beregnes.

Antag, at der eksempelvis er 1000 kvinder pr. aldersår i aldersintervallet 15-35 år i land A og 3000 i land B. Med disse forudsætninger fås:

	Land A	Land B
Kvinder:		
15-35 år	$1000 \cdot 21 = 21.000$	$3000 \cdot 21 = 63.000$
36-49 år	$1000 \cdot 14 = 14.000$	$1000 \cdot 14 = 14.000$
15-49 år	35.000	77.000
Fødsler af kvinder:		
15-35 år	$100 \cdot 21 = 2.100$	$240 \cdot 21 = 5.040$
36-49 år	$10 \cdot 14 = 140$	$8 \cdot 14 = 112$
15-49 år	2.240	5.152
Generel fertilitetskvotient i promille	64	67

Opgave 3.2

Opgavens formål er især at bidrage til, at forskellen mellem generationsbetinget og kalenderårsbetinget (tværnsnitsbetinget) fertilitet bliver klar.

Spsm. 1: De aldersbetingede fertilitetskvoteinter er beregnet ud fra en A-gruppebetragtning. Følgelig indgår der, jf. figur 2.2.2, to generationer i et-årige aldersintervaller og observationsperioder. Kvinder, der er 15 år i en del af 1986, hidrører således fra generationerne 1970 og 1971.

Spsm. 2: Findes ved at summere tallene under 1945-46-generationen. Tallet er 2058. Bemærk, at dette - *generationsbetingede* - mål for den samlede fertilitet begrebsmæssigt er et helt andet mål end den *kalenderårsbetingede* samlede fertilitet. Det er næsten altid den kalenderårsbetingede samlede fertilitet, der refereres til, når udtrykket samlet fertilitet benyttes.

Spsm. 3: Af svaret på spørgsmål 1 fremgår, at det tal for antal fødte, der står i række-søjle kombinationen (15 år, generation 1970-71) er 15-åriges fødsler i 1986. I række-søjle kombinationen (16 år, generation 1969-70) står følgelig 16-åriges fødsler i 1986. Den kalenderårsbetingede samlede fertilitet kan følgelig også udledes af den viste tabel og er for

1986 for aldersgrupperne 15-45 år: $1 + 2 + 6 + 13 + 24 + 40 + 58 + 79 + 91 + 108 + 122 + 128 + 125 + 119 + 106 + 97 + 82 + 67 + 53 + 43 + 34 + 25 + 19 + 13 + 9 + 7 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 1481$.

Af tidligere udgaver af Befolkningens bevægelser fremgår, at de tilsvarende tal for aldersintervallet 46-49 år alle er nul.

Den samlede fertilitet for 1986 er således 1481.

I henhold til Danmarks Statistik 1997. *Befolkningens bevægelser 1995*, tabel 6 er den samlede fertilitet for 1986 opgjort til 1480. Forskellen til de 1481 skyldes afrundingsfejl.

Opgave 3.3

Opgavens formål er især at bidrage til, at forskellen mellem middellevetid og restmiddellevetid bliver slået fast.

Spsm. 1: 0,43 procent. Danmarks Statistik bruger en C-gruppe betragtning, se afsnit 3.3.

Spsm. 2: 21.237 ud af 57.275 når 90-årsalderen, følgelig er der 36.038, der ikke når 90-årsalderen.

Dødshyppigheden for 80-årige kvinder i et 10-års interval er derfor $(36.038/57.275) \cdot 1.000 = 629$ o/oo. Danmarks Statistik bruger en B-gruppe betragtning for 80-årige og ikke en C-gruppe betragtning som for 0-årige.

Spsm. 3: Tallet vil være mindre for 0-årige, da overlevelseskurven i dette aldersinterval er konkav mod origo, mens det vil være større for 70-årige, da overlevelseskurven i dette aldersinterval er konveks mod origo, se figur 3.3.2. For 0-årige er middellevetiden:

1	"	$(0,112 \cdot 100.000 + 0,888 \cdot 99.568)$	=	99.616
34	"	$(99.568 + 98.740)/2$	=	3.371.236
25	"	$(98.740 + 91.922)/2$	=	2.383.275
10	"	$(91.922 + 80.984)/2$	=	864.305
10	"	$(80.984 + 57.275)/2$	=	691.295
10	"	$(57.275 + 21.237)/2$	=	392.560
10	"	$(21.237 + 1.125)/2$	=	111.810
10	"	$(1.125 + 0)/2$	=	<u>5.625</u>
I alt				7.919.947

Følgelig bliver den beregnede middellevetid for 0-årige piger: 79,20 år.

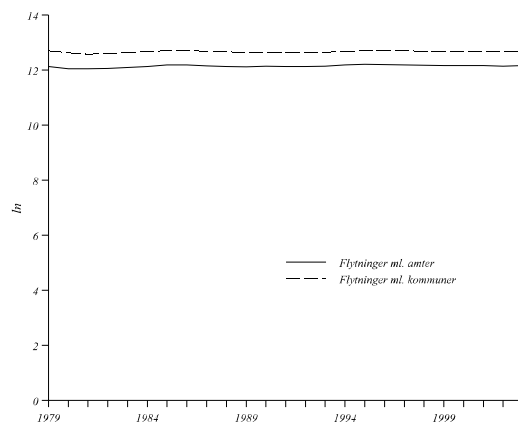
For 70-årige kvinder bliver restmiddellevetiden: $(691.295 + 392.560 + 111.810 + 5.625)/80.984 = 14,83$ år. Når levetiden er større for 70-årige end for 0-årige, hænger det sammen med, at 70-årige jo pr. definition bliver mindst 70 år, derimod er der, jf. dødelighedstavlen, mange 0-årige, der ikke engang bliver 70 år.

Det fremgår altså, at den beregnede middellevetid for 0-årige og den beregnede restmiddellevetid for 70-årige forholder sig til de af Danmarks Statistik beregnede tal som anført i begyndelsen af svaret på dette spørgsmål.

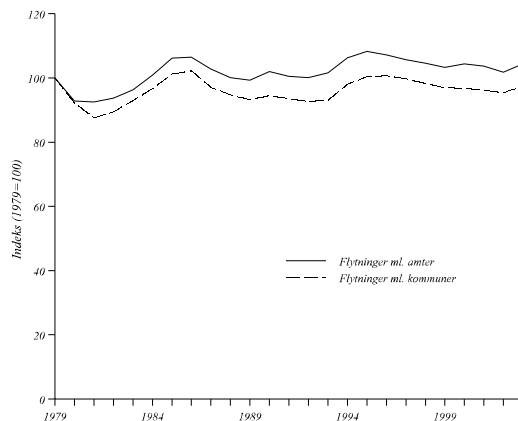
Opgave 3.4

Opgavens formål er især: 1) at forklare anvendelsen af figurer med enkelt logaritmisk skala, 2) at påpege konjunkturudviklingens betydning for flytninger og 3) at sammenligne enkelt logaritmetransformationer med indekstal.

Figur 1. Flytninger ml. hhv. kommuner og amter 1979-2003. Enkelt-logaritmisk



Figur 2. Flytninger ml. hhv. kommuner og amter 1979-2003. Indeks (1979=100)



Spsm. 1: Rette linier i figurer med en enkelt-logaritmisk skala, hvor tiden er afsat ud ad 1. aksens, afbilder forløb med en *konstant (relativ) vækstrate*. Betegner V_t eksempelvis antal flytninger i år t , ville flyttetallet ved konstant vækstrate være givet ved:

$$V_t = V_0(1+v)^t \quad (1)$$

hvor: v årlig vækstrate i antal flytninger.

Tages logaritmen til (1) fås:

$$\ln V_t = \ln V_0 + \ln(1+v) \cdot t \quad (2)$$

Af (2) følger, at forløb (1) med konstante vækstrater bliver til rette linier i figurer med en enkelt logaritmisk skala.

Da $\ln(1+v) \simeq \ln(1) + v \cdot \ln'(1) = v$ er hældningskoefficienten også approksimativ lig vækstraten.

Rette linier i alm. figurer, hvor tiden er afsat ud ad 1. akse, afbilder forløb med en konstant absolut stigning pr. tidsenhed. Dette gælder også for indekstal.

Spsm. 2: Udviklingen i flytninger og vandringer afspejler meget klart den indflydelse, som de økonomiske konjunkturer har på disse tal.

Spsm. 3: Logaritmefunktioner er kun defineret for positive tal. I den givne sammenhæng er dette relevant for nettoindvandring. Fordele og ulemper ved logaritmefunktioner og transformationer til indekstal er forsøgt skitseret i nedenstående oversigt.

	Fordele	Ulemper
Logaritmefunktion	Når relative vækstrater skal sammenlignes	Når der fokuseres på andet end relative vækstrater
Indekstal	Når talserier har forskellig størrelsesorden og den relative udvikling i forhold til en bestemt basis ønskes sammenlignet	Indekstal siger ikke noget om niveauet af de underliggende tal

Opgave 3.5

Der ønskes her en vurdering af de forudsætninger, der implicit ligger bag demografiske mål.

For at forstå forskellen på tværsnits- og generationsbetragtninger, tages der udgangspunkt i et konkret eksempel, nemlig den samlede fertilitet.

Den samlede fertilitet beregnes som summen af alle de aldersbetingede fertilitetskvoteinter for kvinder i den fødedygtige alder, dvs. 15-49 år, i et givet kalenderår. Den samlede fertilitet er dermed tværsnitsbetinget, da der beregnes et tværnit over 35 generationer i et givet år (aldersintervallet 15-49 år indeholder 35 generationer).

En generationsbetinget samlet fertilitet beregnes som summen af alle de aldersbetingede fertilitetskvoteinter for kvinder tilhørende en bestemt generation. F.eks. beregnes den generationsbetingede samlede fertilitet for kvinder født i 1945-46 (opgjort som A-grupper, derfor 2 år), som det antal børn 1000 kvinder fra denne generation føder over deres fertile alder, når de føder i overensstemmelse med de aldersbetingede fertilitetskvoteinter, der løbende gælder i deres fertile alder. Dvs. summen af de aldersbetingede fertilitetskvoteinter i perioden 1960-1994. Den opgøres til 2058 (se Danmarks Statistik 1997. *Befolkningens bevægelser 1995*, tabel 7).

Ved at betragte figur 5.3.2 i bogen ses, at den generationsbetingede samlede fertilitet er langt mere stabil end den tværsnitsbetingede fertilitet.

Det kan derfor også være ønskeligt at anvende den generationsbetingede fertilitet ved langsigtsprognoser, da det kan give et bedre billede af fertilitetsudviklingen.

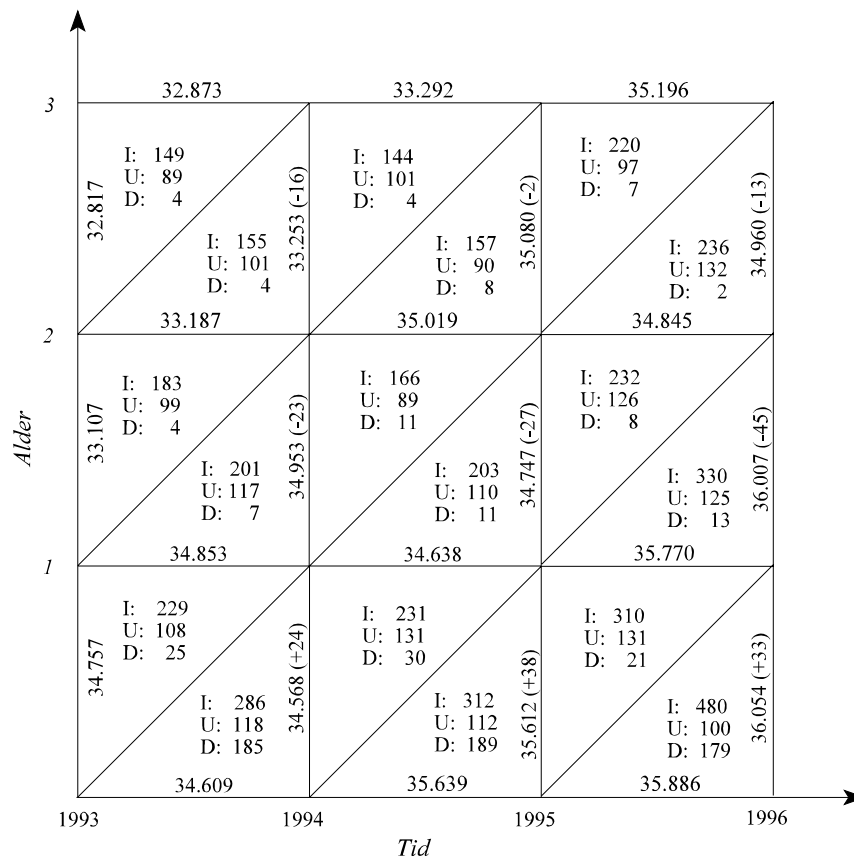
Det er tværsnitsbetragtninger, der ligger bag nettoreproduktionstallet.

Opgave 3.6

Formålet med denne opgave er at arbejde med Lexis-skemaet og herudfra at beregne hyppigheder og kvotienter.

Spsm. 1:

Figur 1. Lexis-skemaet for drenge født 1993-1995



Anm.: Tallene i parentes angiver korrektion, og omfatter forsvundne og genfundne danske statsborgere og er desuden en afstemningspost.

Spsm.2:

$$hd_{1992-1993/1992,1,1994/1994}^A = \frac{11+11}{34.953 + \frac{1}{2}(166+203) - \frac{1}{2}(89+110)}$$

$$hd_{1992-1993/1993,1/1^*,1994}^A = \frac{11+11}{34.638 + \frac{1}{2}(166+203) - \frac{1}{2}(89+110)}$$

$$hd_{1993,1-2/1,1995/1995^*}^B = \frac{8+2}{34.747 + \frac{1}{2}(232+236) - \frac{1}{2}(126+132)}$$

$$hd_{1992,1/1^*,1993-94/1993}^C = \frac{7+11}{34.853 + \frac{1}{2}(201+166) - \frac{1}{2}(117+89)}$$

Spsm.3: Ind- og udvandringen i nævneren ganges med $\frac{1}{2}$ for at korrigere for den tid, hvor de ikke har opholdt sig i landet. Under antagelse af, at ind- og udvandring foregår jævnt hen over året, så opholder de sig i gennemsnit halvdelen af tiden i udlandet. Derfor ganges med $\frac{1}{2}$.

Spsm.4:

$$kd_{1993-94/1993,1,1995/1995^*}^A = \frac{8+13}{34.747 + \frac{1}{2}(232+330) - \frac{1}{2}(126+125) - \frac{1}{2}(8+13)}$$

$$kd_{1991-1992/1992,1/1^*,1993}^A = \frac{4+7}{34.853 + \frac{1}{2}(183+201) - \frac{1}{2}(99+117) - \frac{1}{2}(4+7)}$$

$$kd_{1993,0-1/0,1994/1994^*}^B = \frac{30+11}{34.468 + \frac{1}{2}(231+203) - \frac{1}{2}(131+110) - \frac{1}{2}(30+11)}$$

$$kd_{1993,1/1^*,1994-1995/1994}^C = \frac{11+8}{34.638 + \frac{1}{2}(203+232) - \frac{1}{2}(110+126) - \frac{1}{2}(11+8)}$$

Opgave 3.7

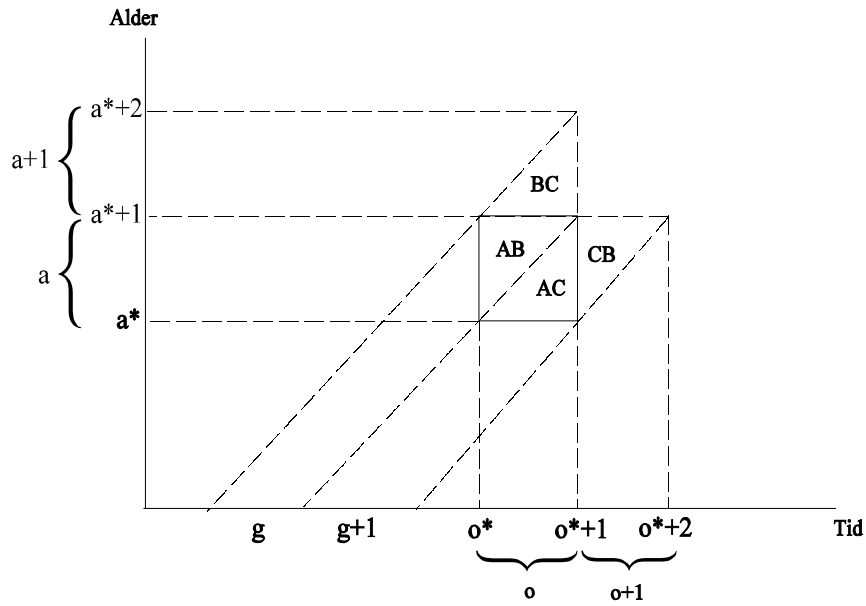
Formålet med opgaven er at opøve evnen til analytisk arbejde.

Det generelle udtryk for et tidspunktfikseret aldersbetinget A-hyppighedsmål i en lukket befolkning er, når dødelighed bruges som eksempel:

$$hd_{g:g+1/g,a,o/o^*}^A = \frac{D_{g:g+1,a,o}}{B_{g,a,o^*}} \quad (1)$$

idet $g:g+1$ udtrykker, at der både indgår observationer fra generation g og $g+1$. En tilsvarende forklaring gælder for $a:a+1$ og $o:o+1$.

Figur 1. Lexis-skemaet og A-hyppighedsmål



Der gælder, jf. også figur 1, at:

$$D_{g:g+1,a,o} = k^B \cdot D_{g,a,a+1,o} + k^C \cdot D_{g+1,a,o:o+1} \quad (2)$$

hvor: $0 < k^B < 1$ og $0 < k^C < 1$.

(2) siger blot, at alle døde i B-arealet $AB + BC$ ikke er placeret i kun den ene af de to elementartrekanter AB og BC , og at ligeledes alle døde i C-arealet $AC + CB$ ikke er placeret i kun den ene af de to elementartrekanter AC og CB . Indsættes (2) i (1), fås:

$$hd_{g:g+1/g,a,o/o^*}^A = k^B \cdot \frac{D_{g,a,a+1,o}}{B_{g,a,o^*}} + k^C \cdot \frac{D_{g+1,a,o:o+1}}{B_{g+1,a^*,o}} \cdot \frac{B_{g+1,a^*,o}}{B_{g,a,o^*}} \quad (3)$$

(3) kan omskrives til:

$$hd_{g:g+1/g,a,o/o}^A = k^B \cdot hd_{g,a:a+1/a,o/o}^B + k^C \cdot hd_{g+1,a/a^*,o:o+1/o}^C \cdot \frac{B_{g+1,a^*,o}}{B_{g,a,o^*}} \quad (4)$$

(4) viser, at tidspunktfikserede aldersbetingede A-hyppighedsmål for lukkede befolkninger ikke er størrelsesmæssigt afgrænsede af de tilsvarende aldersbetingede B- og C-hyppighedsmål, idet A-hyppighedsmål derudover også er afhængige af to nabogenerationers indbyrdes størrelsesforhold, jf. leddet $B_{g+1,a^*,o}/B_{g,a,o^*}$. Dette er naturligvis en følge af, at en A-gruppe omfatter døde for to nabogenerationer.

Det følger umiddelbart, at der gælder tilsvarende forhold for åbne befolkninger, idet hyppighedsmål for åbne befolkninger blot fremkommer ved en nævnerkorrektion i de tilsvarende mål for lukkede befolkninger.

Det generelle udtryk for et aldersfikseret aldersbetinget A-hyppighedsmål i en lukket befolkning er, når dødelighed bruges som eksempel:

$$hd_{g:g+1/g+1,a/a^*,o}^A = \frac{D_{g:g+1,a,o}}{B_{g+1,a^*,o}} \quad (5)$$

Indsættes (2) i (5), fås:

$$hd_{g:g+1/g+1,a/a^*,o}^A = k^B \cdot \frac{D_{g,a:a+1,o}}{B_{g,a,o^*}} \cdot \frac{B_{g,a,o^*}}{B_{g+1,a^*,o}} + k^C \cdot \frac{D_{g+1,a,o:o+1}}{B_{g+1,a^*,o}} \quad (6)$$

(6) kan omskrives til:

$$hd_{g:g+1/g+1,a/a^*,o}^A = k^B \cdot hd_{g,a:a+1/a,o/o}^B \cdot \frac{B_{g,a,o^*}}{B_{g+1,a^*,o}} + k^C \cdot hd_{g+1,a/a^*,o:o+1/o}^C \quad (7)$$

(7) giver anledning til en tilsvarende konklusion som (4).

Opgave 3.8

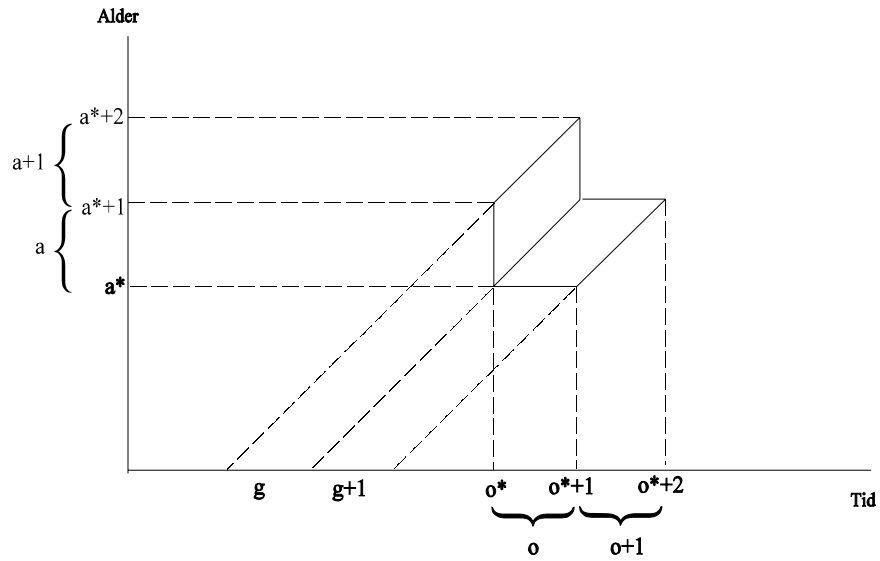
Formålet med opgaven er at opøve evnen til analytisk arbejde.

I afsnit 2.4 blev det vist, at antal leveår ! nævnerudtrykket ! i kvotientmål, se (2.4.1) ! tilnærmet kan beregnes som:

$$\frac{1}{2} (B_{g,a,o} + B_{g,a+1,o+1}) \quad (1)$$

Ved såvel B- som C-kvotientmål er det kun manglende opfyldelse af forudsætningen om konstant dødelighed i det betragtede aldersinterval i det betragtede tidsrum, der giver afvigelser mellem det korrekte antal leveår og de efter (1) beregnede leveår, jf. også figur 1.

Figur 1. Lexis-skemaet samt B- og C-kvotientmål



Ved B- og C-kvotientmål kan (1), jf. figur 1, hhv. præciseres til:

$$\frac{1}{2} (B_{g,a,o^*} + B_{g,a+1,o^*+1}) \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} (B_{g+1,a^*,o} + B_{g+1,a^*+1,o^*+1}) \quad (3)$$

B- og C-kvotientmål i såvel lukkede som åbne befolkninger er derfor tilnærmet lig:

$$kd_{g,a:a+1|a,o|o^*}^B = \frac{D_{g,a:a+1,o}}{\frac{1}{2} (B_{g,a,o^*} + B_{g,a+1,o^*+1})} \quad (4)$$

idet $B_{g,a+1,o^*+1} = B_{g,a,o^*} - D_{g,a:a+1,o}$ i lukkede befolkninger

$= B_{g,a,o^*} - D_{g,a:a+1,o} - U_{g,a:a+1,o} + I_{g,a:a+1,o}$ i åbne befolkninger.

$$kd_{g+1,a/a^*,o:o+1/o}^C = \frac{D_{g+1,a,o:o+1}}{\frac{1}{2} (B_{g+1,a^*,o} + B_{g+1,a^*+1,o+1})} \quad (5)$$

idet $B_{g+1,a^*+1,o+1} = B_{g+1,a^*,o} - D_{g+1,a,o:o+1}$ i lukkede befolkninger

$$= B_{g+1,a^*,o} - D_{g+1,a,o:o+1} - U_{g+1,a,o:o+1} + I_{g+1,a,o:o+1} \text{ i åbne befolkninger.}$$

Det fremgår altså, at det generelle kvotientmål (2.4.1) umiddelbart kan præciseres i såvel en B-gruppe- som i en C-gruppesammenhæng.

Som for hyppigheder er der for kvotienter såvel et tidspunkt- som et aldersfikseret mål, når der anlægges en A-gruppebetragtning.

Betragtes det generelle (tilnærmede) udtryk for kvotientmål, jf. (2.4.1):

$$kd_{g,a,o} = \frac{D_{g,a,o}}{\frac{1}{2} (B_{g,a,o} + B_{g,a+1,o+1})} \quad (6)$$

bliver det præciserede mål for et tidspunktfikseret A-kvotientmål i en åben befolkning:

$$kd_{g:g+1/g,a,o/o^*}^A = \frac{D_{g:g+1,a,o}}{B_{g,a,o^*} - \frac{1}{2} D_{g,a:a+1,o} - \frac{1}{2} U_{g,a:a+1,o} + \frac{1}{2} I_{g,a:a+1,o}} \quad (7)$$

idet nævnerudtrykket i (7) er det tilnærmede antal leveår beregnet efter en tidspunktfikseret opgørelse, dvs. med udgangspunkt i en B-afgrænsning. Bemærk derfor også, at D-udtrykket i tælleren og nævneren i (7) er afgrænset forskelligt, idet D-udtrykket i tælleren vedrører en A-afgrænsning.

Det præciserede mål for et aldersfikseret A-kvotientmål i en åben befolkning er:

$$kd_{g:g+1/g+1,a/a^*,o}^A = \frac{D_{g:g+1,a,o}}{B_{g+1,a^*,o} - \frac{1}{2} D_{g+1,a,o:o+1} - \frac{1}{2} U_{g+1,a,o:o+1} + \frac{1}{2} I_{g+1,a,o:o+1}} \quad (8)$$

idet nævnerudtrykket i (8) er det tilnærmede antal leveår beregnet efter en aldersfikseret opgørelse, dvs. med udgangspunkt i en C-afgrænsning. Bemærk derfor også, at D-udtrykket i tælleren og nævneren i (8) er afgrænset forskelligt, idet D-udtrykket i tælleren vedrører en A-afgrænsning.

Denne direkte sammenblanding af grupper er uheldig, hvorfor følgende alternative udtryk for hhv. tidspunktfikserede og aldersfikserede A-kvotientmål kan formuleres:

$$kd_{g:g+1/g,a,o/o}^A = \frac{D_{g:g+1,a,o}}{B_{g,a,o} - \frac{1}{2} D_{g:g+1,a,o} - \frac{1}{2} U_{g:g+1,a,o} + \frac{1}{2} I_{g:g+1,a,o}} \quad (9)$$

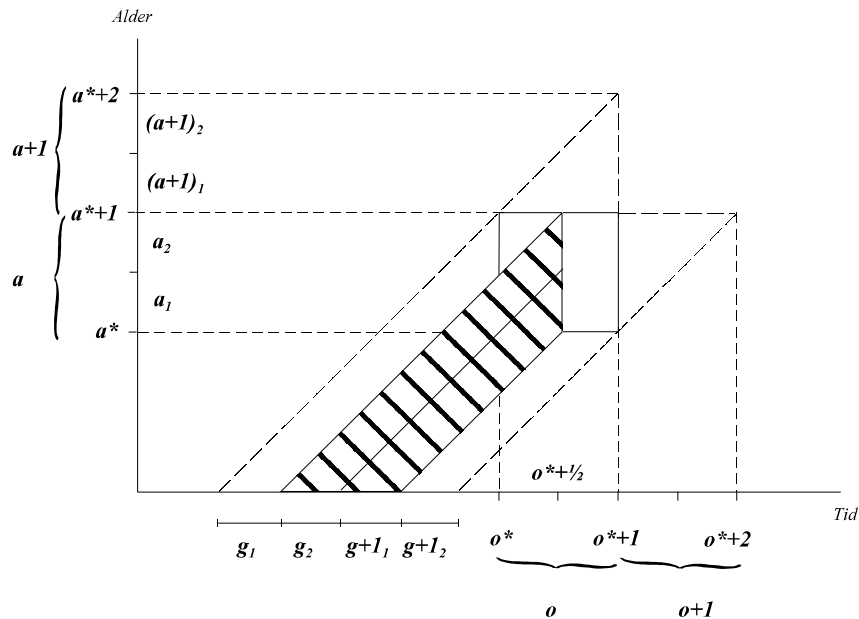
$$kd_{g:g+1/g+1,a/a^*,o}^A = \frac{D_{g:g+1,a,o}}{B_{g+1,a^*,o} - \frac{1}{2} D_{g:g+1,a,o} - \frac{1}{2} U_{g:g+1,a,o} + \frac{1}{2} I_{g:g+1,a,o}} \quad (10)$$

idet antal leveår i den tidspunktfikserede opgørelse i (9) beregnes som antallet af a-årige primo observationsperioden minus halvdelen af døde + udvandrede - indvandrede a-årige i observationsperioden. Tilsvarende er antal leveår i den aldersfikserede opgørelse i (10) beregnet som antallet af netop a-årige i observationsperioden minus halvdelen af døde + udvandrede - indvandrede a-årige i observationsperioden.

Bemærk, at korrektionsposterne i nævnerudtrykkene i (9) og (10), dvs. D-, U- og I-udtrykkene, herved får samme fodtegn som D-udtrykket i tælleren af (9) og (10).

Imidlertid beregner Danmarks Statistik ingen af A-kvotientmålene ved hjælp af (7)-(10), idet nævnerudtrykket i Danmarks Statistiks kvotientmål approksimeres ved befolkningstallet eller relevante udsnit heraf fra *medio* det betragtede kaldenderår. Figur 2 illustrerer problemstillingen ! også i relation til beregningsformlerne (7)-(10).

Figur 2. Lexis-skemaet samt A-kvotientmål



Indføres notationen $g = g_1 \text{ W } g_2$ og $a = a_1 \text{ W } a_2$, hvor fodtegnene 1 og 2 til fodtegnene g og a refererer til henholdsvis 1- og 2-halvår af det betragtede kalenderår (generation)/aldersinterval, har de af Danmarks Statistik beregnede kvotientmål flg. udseende:

$$kd^A = \frac{D_{g:g+1,a,o}}{B_{g_2,a_2,o^*+\frac{1}{2}} + B_{(g+1)_1,a_1,o^*+\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

Også dette mål er, som andre A-mål, meget vanskelig præcist at fortolke. Nævnerudtrykket i (11) er som nævnerudtrykket i (7)-(10) afhængig af forholdene for to generationer, og i relation til (11) rettere to halvgenerationer, nemlig fra sidste halvdel af et kalenderår og første halvdel af det efterfølgende kalenderår. Det er heller ikke åbenbart, hvordan betydningen af halvgenerationer skal fortolkes. Grundet evt. systematiske forskelle i fertilitet gennem kalenderår, synes (11) ikke at gøre fortolkningen af A-kvotientmål mere klart.

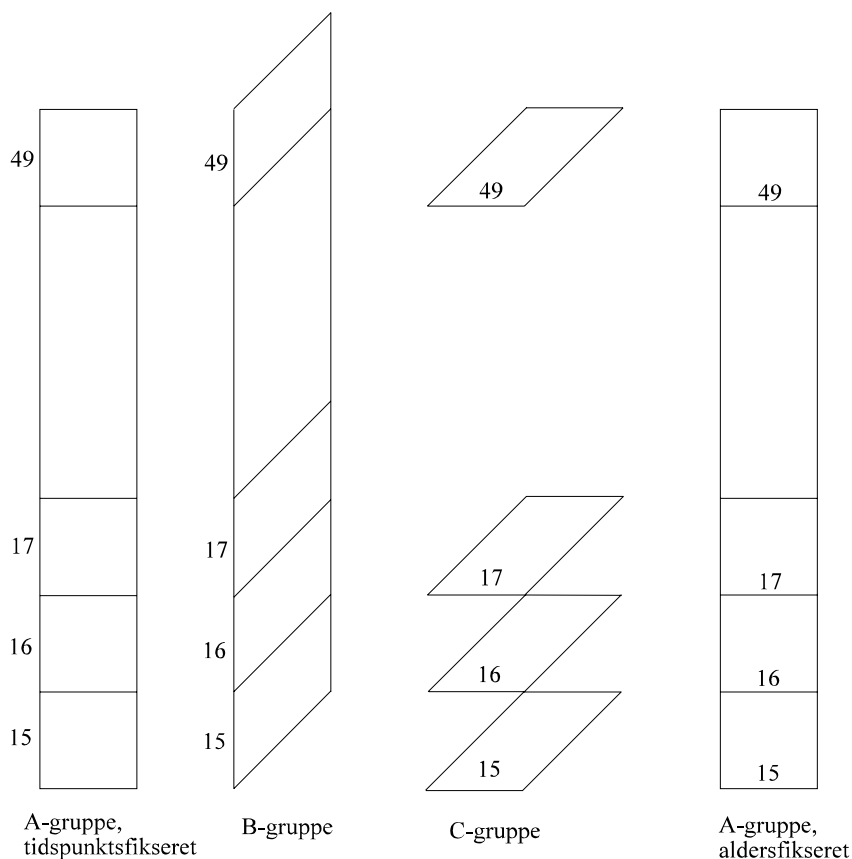
Anvendelsen af befolkningstallet eller relevante udsnit heraf fra *medio* det betragtede kalenderår, gør det ikke relevant at sondre mellem tidspunktfikserede og aldersfikserede kvotientmål for de kvotientmål, som Danmarks Statistik beregner.

Opgave 3.9

Formålet med opgaven er at indøve brugen af A-, B- og C-grupper til afklaring af demografiske problemstillinger.

A-, B- og C-grupper er i figur 1 indtegnet for i princippet samtlige 35 årlige underopdelinger af det fertile aldersinterval 15-49 år, begge år inkl. De tilknyttede aldersangivelser på 15, 16, 17, ..., 49 er placeret enten til venstre for de sider (A-gruppe, tidspunktfikseret, og B-gruppe) eller over de sider (C-gruppe og A-gruppe, aldersfikseret), hvor livslinierne skærer for de kvinder, der er fertile i henhold til den anlagte betragtningsmåde, og som derfor er udgangspunktet for at beregne gennemlevet tid, der udgør nævnerudtrykket i den generelle fertilitetskvoient. Tællerudtrykket i den generelle fertilitetskvoient udgøres af de f'er (lig antal levendefødte), der kan optælles i de 35 grupper. Der er dog ikke angivet nogen f'er i nogen af de fire sæt af stakkede grupper i figur 1.

Figur 1. A-, B- og C-grupper til beregning af den generelle fertilitetskvoient



Figur 1 viser umiddelbart, hvordan den generelle fertilitetskvoient skal beregnes ud fra hhv. en A-, B og C-gruppebetragtning.

Når den summariske fertilitetskvotient skal beregnes, skal nævnerudtrykket suppleres med gennemlevet tid for hhv. samtlige mænd og kvinder uden for det fertile aldersinterval.

Beregningen af den summariske fertilitetskvotient kan illustreres efter samme måde, som der er anvendt for den generelle fertilitetskvotient. En hertil svarende figur kan konstrueres ved at ændre figur 1, så hele aldersintervallet inddrages. Derudover skal samtlige livslinier og ikke blot livslinier for fertile kvinder inddrages, når gennemlevet tid til nævnerudtrykket beregnes. Bemærk, at tællerudtrykket ikke ændres, idet der kun medregnes f 'er i det fertile aldersinterval.

Det følger umiddelbart heraf, at den summariske fertilitetskvotient kan beregnes efter såvel en A-, B- som en C-gruppebetragtning.

I Danmarks Statistiks beregning af den generelle og den summariske fertilitetskvotient er tællerudtrykket *alle levendefødte børn i det pågældende kalenderår*. Under antagelse af, at alle fødsler gennemføres af 15-49-årige, betyder dette, at den generelle og den summariske fertilitetskvotient er beregnet efter en A-gruppebetragtning. En B-gruppebetragtning udelukkes af, at fødsler af 15-årige, der kun er 14-årige primo det betragtede kalenderår, ikke medregnes, se figur 1. En C-gruppebetragtning udelukkes af, at der indgår fødsler fra to kalenderår i C-udtryk. For kvotientmål er der ikke forskel mellem en tidspunktfikseret og en aldersfikseret A-gruppebetragtning, når befolkningstallet medio kalenderåret anvendes til approksimation af gennemlevet tid, se også opgave 3.8.

Opgave 3.10

Formålet med opgaven er at indøve brugen af A-, B- og C-grupper til afklaring af demografiske problemstillinger.

Besvarelsen af denne opgave er helt analog til besvarelsen af opgave 3.9, idet aldersintervallet blot skal omfatte hele det mulige aldersinterval (0, 1, 2, ...) og den demografiske komponent levendefødte (udtrykt ved f 'er) skal erstattes af den demografiske komponent dødsfald (udtrykt ved d 'er).

Opgave 3.11

Formålet med opgaven er at bidrage til at forklare forskellen mellem antal flyttede personer og antal flytninger.

Spsm. 1: $865.952 = 324.199 + 541.753$, da flytninger mellem amter også er flytninger mellem kommuner.

Spsm. 2: Mindre, da en person kan flytte mere end en gang pr. år.

Opgave 3.12

Formålet med opgaven er at præsentere den dobbelte opgørelse af befolkningstilvæksten.

I 2003 er der noget, der tyder på, at antal af indvandrede er undervurderet.

Opgave 3.13

Formålet med opgaven er at indføre brugen af A-, B- og C-grupper til afklaring af demografiske problemstillinger.

Besvarelsen af denne opgave er helt analog til besvarelsen af opgave 3.9, idet aldersintervallet blot skal omfatte hele det mulige vielsesaldersinterval og den demografiske komponent levendefødte (udtrykt ved f 'er) skal erstattes af den demografiske komponent vielser (udtrykt ved v 'er).

Opgave 4.1

Formålet med opgaven er at opøve evnen til regning med procenter.

Fra 5. nov. 1940 til 5. nov. 1944 er der 4 år. Fra 5. nov. 1944 til 15. juni 1945 er der flg. antal dage: $25 + 31 + 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 15 = 222$ dage el. 0,6082 år.

Beregningsformlen bliver derfor:

$$3.844.312 (1 + x)^{4,6082} = 4.045.232 \quad (1)$$

Heraf fås $x = 0,0111$. Befolkningstvæksten er følgelig 1,11 pct. p.a. i den betragtede periode.

Opgave 4.2

Formålet med opgaven er at opøve evnen til analytisk arbejde.

I beregningen af middellevetider i kapitel 3 blev der taget udgangspunkt i en begyndelseskohorte på 100.000 hhv. nyfødte piger og drenge. Når beregningen af middellevetiden og restmiddellevetiden baseres på hyppigheder, er det mere hensigtsmæssigt at tage udgangspunkt i en begyndelseskohorte på 1.

Lad derfor $h_{0,1}^c = 1$ betegne en begyndelseskohorte på 1 af netop nyfødte (0-årige) piger (1), idet der først ses på beregningen af middellevetider for kvinder.

Efter 1 år er der følgende $1 - hd_{0,1}^c$ overlevende netop 1-årige piger, efter 2 år $(1 - hd_{0,1}^c)^2$ ($1 - hd_{1,1}^c$) overlevende netop 2-årige piger eller generelt efter a år:

$$ho_{a,1} = \prod_{j=0}^{a-1} (1 - hd_{j,1}^c) \quad , \quad a = 1, 2, \dots \quad (1)$$

overlevende netop a -årige kvinder, idet endvidere $ho_{0,1} = 1$.

Under antagelse af lineær interpolation mellem overlevende fås middellevetiden (RML) for kvinder til:

$$RML_{0,1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} (ho_{i,1} + ho_{i+1,1}) \quad (2)$$

Afskæres beregningsintervallet til 0-100 år, er $ho_{100,1} = 0$, og (2) kan omskrives til:

$$RML_{0,1} = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{99} ho_{i,1} \quad (3)$$

Indsættes (1) i (3), fås:

$$RML_{0,1} = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{99} \prod_{j=0}^{i-1} (1 - hd_{j,1}^c) \quad (4)$$

Restmiddellevetiden for en netop a -årig kvinde er derfor lig:

$$RML_{a,1} = \frac{1}{2} + \sum_{i=a+1}^{99} \prod_{j=a}^{i-1} (1 - hd_{j,1}^c) \quad (5)$$

For mænd fås tilsvarende udtryk som (4) og (5), idet $RML_{0,1}$, $RML_{a,1}$ og $hd_{j,1}^c$ blot skal erstattes af hhv. $RML_{0,2}$, $RML_{a,2}$ og $hd_{j,2}^c$.

Opgave 4.3

Formålet med opgaven er at opøve evnen til analytisk arbejde.

Antal overlevende netop a -årige kvinder er, jf. opgave 4.2:

$$ho_{a,1} = \prod_{j=0}^{a-1} (1 - hd_{j,1}^c) , \quad a = 1,2,\dots \quad (1)$$

idet endvidere $ho_{0,1} = 1$.

Antal leveår for en netop a-årig kvinde i aldersintervallet (a, a+1) er pr. definition i gennemsnit $(1 - kd_{a,1}^c)$.

Middellevetiden for kvinder er følgelig:

$$RML_{0,1} = \sum_{i=0}^{\infty} (1 - kd_{i,1}^c) \cdot ho_{i,1} \quad (2)$$

Afskæres beregningsintervallet til 0-100 år, og indsættes (1) i (2), fås:

$$RML_{0,1} = \sum_{i=0}^{99} (1 - kd_{i,1}^c) \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (1 - hd_{j,1}^c) \quad (3)$$

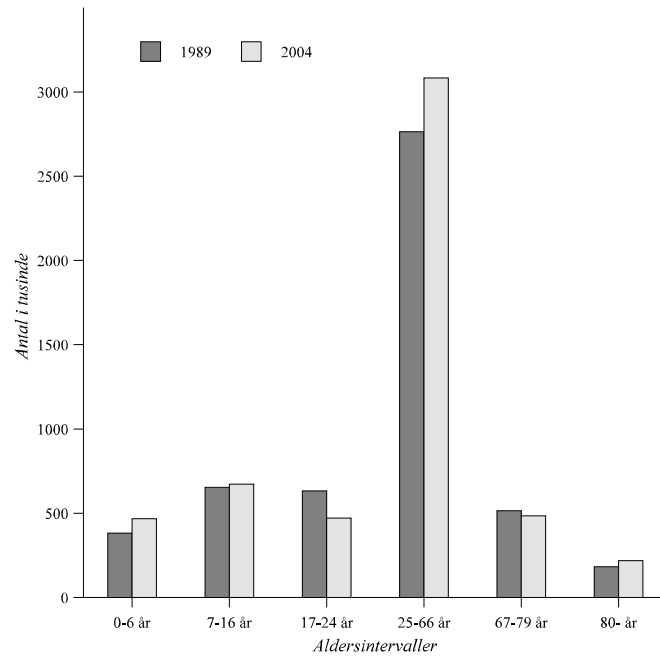
Restmiddellevetiden for en netop a-årig kvinde er derfor lig:

$$RML_{a,1} = \sum_{i=a}^{99} (1 - kd_{i,1}^c) \cdot \prod_{j=a}^{i-1} (1 - hd_{j,1}^c) \quad (4)$$

For mænd fås tilsvarende udtryk som (3) og (4), idet $RML_{0,1}$, $RML_{a,1}$, $hd_{j,1}^c$ og $kd_{i,1}^c$ erstattes af henholdsvis $RML_{0,2}$, $RML_{a,2}$, $hd_{j,2}^c$ og $kd_{i,2}^c$.

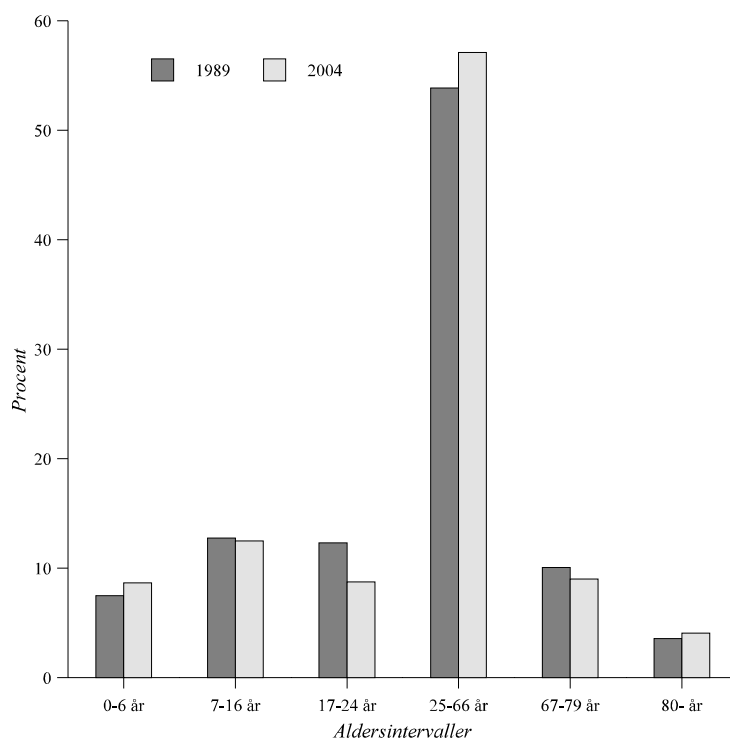
Bemærk, at det i afsnit 3.3 blev anført, at middellevetider og restmiddellevetider begrebsmæssigt var kvotientmål. Dette kommer netop til udtryk i (3) og (4).

Figur 1. Befolkningens alderssammensætning primo 1989 og primo 2004



Kilder: Danmarks Statistik 1989. *Befolkningens bevægelser 1988*, tabel 76.
Danmarks Statistik 2004. *Befolkningens bevægelser 2003*, tabel 100.

Figur 2. Befolkningens relative alderssammensætning primo 1989 og primo 2004. Pct.



Kilder: Danmarks Statistik 1989. *Befolkningens bevægelser 1988*, tabel 76.
 Danmarks Statistik 2004. *Befolkningens bevægelser 2003*, tabel 100.

Disse aldersopdelinger afspejler typiske faser i livscyklus:

- 0-6 år: før skolealderen
- 7-16 år: alm. skolegang til og med 10. klasse
- 17-24 år: faglig og videregående uddannelse
- 25-66 år: på arbejdsmarkedet
- 67-79 år: pensionistfasen
- 80 år og derover: plejehjemsfasen